



TITLE:

# 帯のトポロジー (多様体の低余次元位置問題について)

AUTHOR(S):

加藤, 十吉

---

CITATION:

加藤, 十吉. 帯のトポロジー (多様体の低余次元位置問題について). 数理解析研究所講究録 1975, 243: 88-96

ISSUE DATE:

1975-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105597>

RIGHT:

# 帯 の トポロジー

東大・教養 加藤十吉

序. なめらかな帯の  $\mathbb{R}^3$  での位置を分類するのが目的である。§1 では同位 (イソトピー) のもとでの分類を行う。帯の中心線の結び糸型とひねり数が完全不変量である。§2 では正則ホモトピーのもとで分類する。mod.4 のひねり数がうめこみの正則ホモトピーのもとでの完全不変量となる。結局、 $\mathbb{R}^3$  のうめこまれた帯の正則ホモトピー類は円環面に帰着する。(但し、うめこみ自体でなく像のみを考える)。

実際、メービウスの帯は4回ひねり (2回ねじれ) の帯と  $\mathbb{R}^3$  の中で正則ホモトープで、4回ひねりの帯と円環面は互に正則ホモトープになる。前者はメービウスの帯を中心線によって切ると4回ひねりの帯がえられることと同等で、後者は図1から観察される。結果はスメールの定理を少し拡張すれば得られるが、直観的な議論はまっわり数の考察でなされ興味深いと思われる。

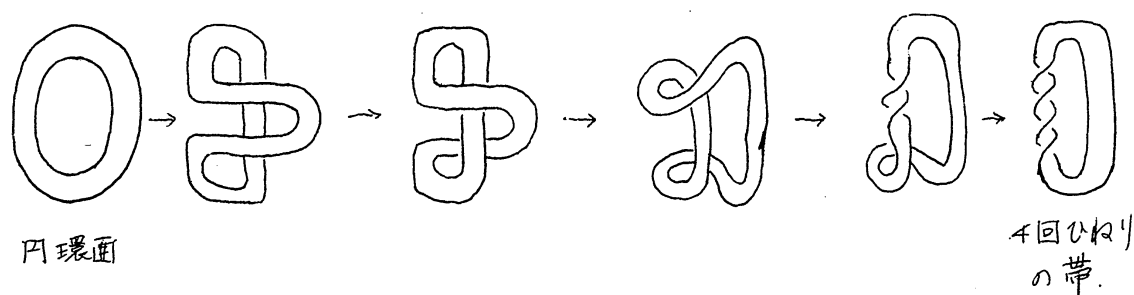


図 1

3.1. 帯とその同位類. 以下, すべて  $C^\infty$ -カテゴリーで考える。  
したがって, 多様体はなめらかで, はめこみ (embedding) や  
うめこみ (immersion) は  $C^\infty$  であるとする。

連結, コンパクトな 2 次元多様体  $B$  に対し,  $H_1(B) = \mathbb{Z}$   
が成立するとき,  $B$  は帯と呼ばれる。曲面の分類定理から,  
帯は円環面  $B_0$  かメービウスの帯  $B_1$  に同相である。帯  $B$  に  
対し,  $H_1(B)$  を生成するホモロジー類を表わす  $B$  の内部の単  
一閉曲線を  $B$  の中心と呼び,  $c$  と表わす。  $c$  は  $B$  の内部のイ  
ソトピーのもと一意的に定まる。  $B$  の境界  $\partial B$  を  $b$  と表わ  
す。  $B$  が  $B_0$  と同相なら,  $b$  はスツの円周で,  $\pi$ ,  $B_1$  の 2  
重被覆は  $B_0$  であるから, サイクルとして,  $b \sim \pm 2c$  (ホモ  
ロギ) という関係がある。  $b$  と  $c$  の向きは常に  $b \sim \pm 2c$  が  
 $\mathbb{R}^3$  にはめこまれた帯  $B$  について考える。  
成立するように定めることにする。  $B$  のひねり数  $\ell(B)$  を

$$\ell(B) = \ell(b, c) \quad (b \text{ と } c \text{ のまっわり数})$$

と定義する。  $\ell(b, c)$  は  $c$  のザイフェルト膜  $F$  と  $b$  の交叉数

$I(b, F)$  に等しい。

定理 1. 帯  $B \subset \mathbb{R}^3$  に対し,  $B$  の中心線  $c \subset \mathbb{R}^3$  の同位類 (結び糸型) とひねり数  $l(B)$  は  $B$  の同位 (イソトピー) 類の完全不変量である。すなわち, この不変量で与えられる次の写像は全単射である。帯の  $\mathbb{R}^3$  での同位類  $\} \Rightarrow \{\text{結び糸型}\} \times \mathbb{Z}$   
(証明) 被覆同位定理により, 同位であることと全同位 (ambient isotope) ということとは同値である。よって, 中心線の結び糸型とひねり数は帯の同位不変量である。逆に, 結び糸  $c$  及び整数  $n$  が与えられたとし,  $c$  を中心線,  $n$  をひねり数とする帯  $B_{c,n}$  を構成し,  $c$  と同位な中心線を有し, ひねり数が  $n$  である帯が  $B_{c,n}$  と同位であることを示そう。  
まず,  $c$  のガイフェルト膜  $F$  をとり,  $F$  への  $\varepsilon$ -法線分バンドルを  $c$  へ制限したものを  $B_{c,0}$  とおく。  $B_{c,0}$  は中心線  $c$ , ひねり数  $0$  を有する。  $c$  の1周のまわりでの  $(\mathbb{R}^3, F, c)$  の局所モデルとして,  $(\mathbb{R}^3, H, \mathbb{R}^1)$  をとれる。但し,  $\mathbb{R}^3$  を  $(x, y, z)$ -空間とすれば,  $H^2$  は  $(x, z)$ -上半平面,  $\mathbb{R}^1$  は  $x$  軸である。  $c$  の向きは,  $\mathbb{R}^1$  の正の向き, そして,  $B_{c,0}$  は  $\mathbb{R}^1 \times [-1, 1] \times 0$  とみなせる。ここで写像  $\tau_n: \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  を,  

$$0 \leq x \leq 1 \text{ に対し, } \tau_n(x, y) = (x, y \cos n \cdot x \cdot \pi, y \sin n \cdot x \cdot \pi)$$

$$\neq, \quad x \leq 0, \quad 1 \leq x \text{ に対し, } \tau_n(x, y) = (x, y, 0)$$

と定義する。  $\tau_n$  は矛盾なく定義され、はめこみである。  
 $[0, 1] \times [-1, 1]$  の外側では恒等写像だから、  $B_{c,0}$  から  $\mathbb{R}^3$   
 へのはめこみ  $\tau_n : B_{c,0} \rightarrow \mathbb{R}^3$  へと拡大される。

$\tau_n(B_{c,0}) = B_{c,n}$  が求まるものである。実際、  $\ell(B_{c,n})$   
 $= n$  が示される。 さて、かつてな帯  $B \subset \mathbb{R}^3$  が与えられ、  
 中心線が  $c$  と同位で、ひねり数  $\ell(B)$  が  $n$  であるとする。  $\mathbb{R}^3$   
 の全同位のもとで、  $B$  の中心線は  $c$  であるとしてよい。  $c$  の  
 $\mathbb{R}^3$  での法円板バンドルを  $N$  とすれば、  $B$  及び  $B_{c,0}$  はその  
 部分線分バンドルとみなされ、  $N$  が自明であることから、こ  
 れらは写像  $\lambda, \lambda_{c,n} : c \rightarrow O(2)/O(1) \times O(1) = S^1/\mathbb{Z}_2$   
 のホモトピー類（すなわち写像度）  $\sqcup$  ( $= S^1$ )  
 で分類される。自明化を  $c$  のサイフェルト膜への法ベクトル  
 場を拡張してとれば、  $\lambda, \lambda_{c,n}$  の写像度はそのひねり数  
 $\ell(B)=n, \ell(B_{c,n})=n$  に一致する。よって、  $B$  及び  $B_{c,n}$   
 は部分バンドルとして同型となる。すなわち、  $N$  の、したが  
 って、  $\mathbb{R}^3$  の全同位のもとで  $B$  と  $B_{c,n}$  は重ねられる。(3).

$c$  が自明な結び糸のとき、  $B_{c,n}$  を  $B_n$  と表わす。  $B_n$  の  
 標準形は2本の組み糸で次の様に表わせる。

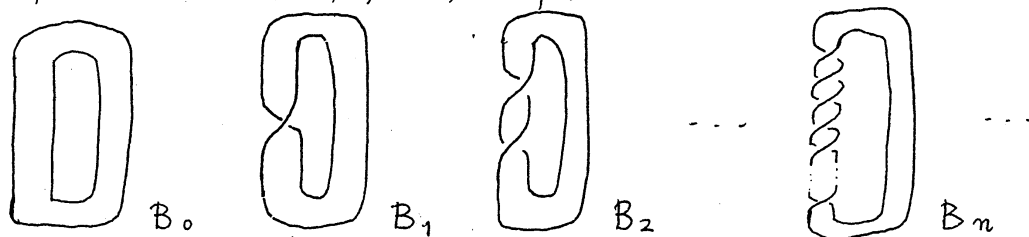


図2.

【注】. はめこみ  $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  が同位となる為の必要十分条件は,  $f(c)$  と  $g(c)$  が向きづけられた結び糸として同位で,  $\ell(f(B)) = \ell(g(B))$  が成立することである.

§2. 帯のうめこみの正則ホモトピー類.

$C^\infty$  写像  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  がうめこみとは,  $B$  の各点で,  $\varphi$  の微分の階数が2であるときをいう.  $\varphi(B)$  は  $\mathbb{R}^3$  にうめこまれた帯であるという.  $C^\infty$  写像  $\Xi : B \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  が正則ホモトピーであるとは, 各  $t \in [0, 1]$  に対し,  $\Xi|_{B \times t}$  がうめこみであるときをいう. このとき,  $\Xi_0(x) = \Xi(x, 0)$ ,  $\Xi_1(x) = \Xi(x, 1)$  により定義されたうめこみ  $\Xi_0, \Xi_1 : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  は互に正則ホモトープであるといわれる. 又, うめこまれた帯  $\Xi(B_0)$  と  $\Xi(B_1)$  も互に正則ホモトープと呼ばれる.

補題1. 帯  $B$  の  $\mathbb{R}^3$  へのうめこみははめこみと正則ホモトープである. (i).  $B$  の中心線のうめこみの自己交叉を  $\mathbb{R}^3$  の局所イソトピーでとり除き, 中心線ははめこまれているとしてよい. 局所イソトピーは  $B$  からの正則ホモトピーへ拡張される. 次に, 中心線の管状近傍の中へ帯をちぢめてゆけばよい. (j).

補題2. 帯  $B \subset \mathbb{R}^3$  はある  $B_n \subset \mathbb{R}^3$  と正則ホモトープ.

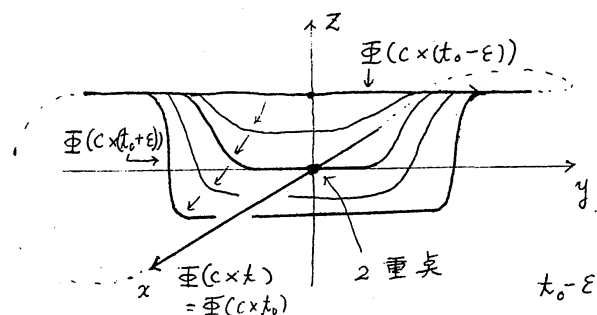
(:)  $B$  の中心線  $c$  を  $\mathbb{R}^3$  へ正則射影して, 正則射影での交叉点の上下の指定を適当に入れかえて  $c$  を自明に示う。中心線のこの正則ホモトピーは図1の途中で行われている帯の上下を入れかえる正則ホモトピーへと拡張される。(了)

補題3.  $n \equiv m \pmod{4}$  であれば,  $B_n$  と  $B_m$  は正則ホモトープである。(:) 図2よりこれは図1に帰着される。

はめに  $f: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対し,  $l(f) = l(f(B))$  と定義し,  $f$  のひねり数と呼ぶ。

補題4. はめに  $f, g: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  が正則ホモトープなら,  $l(f) \equiv l(g) \pmod{4}$  が成立する。

(:)  $f$  と  $g$  の間の正則ホモトピー  $\varphi: B \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $c \times [0, 1]$  へ制限したものは,  $f(c)$  と  $g(c)$  の間の正則ホモトピーとなる。これを一般にすれば,  $[0, 1]$  の有限個の点を除くと同位を与えるとしてよい。そして, その有限個の点<sup>てい</sup>は  $c$  が二重点をもつように  $\varphi$  でうつされるとしてよい。局所的には次の図3の左のようになる。但し,  $\varphi(c \times t_0)$  が二重点を有するとしている。



$$t_0 - \epsilon \leq t \leq t_0 + \epsilon$$

を有するとしている。

したがって, ひねり数の変化はそのような  $t_0$  で問題となる。

$$B^- = \pi(B \times (t_0 - \varepsilon)) \quad , \quad B^+ = \pi(B \times (t_0 + \varepsilon)) \quad \text{と かく。}$$

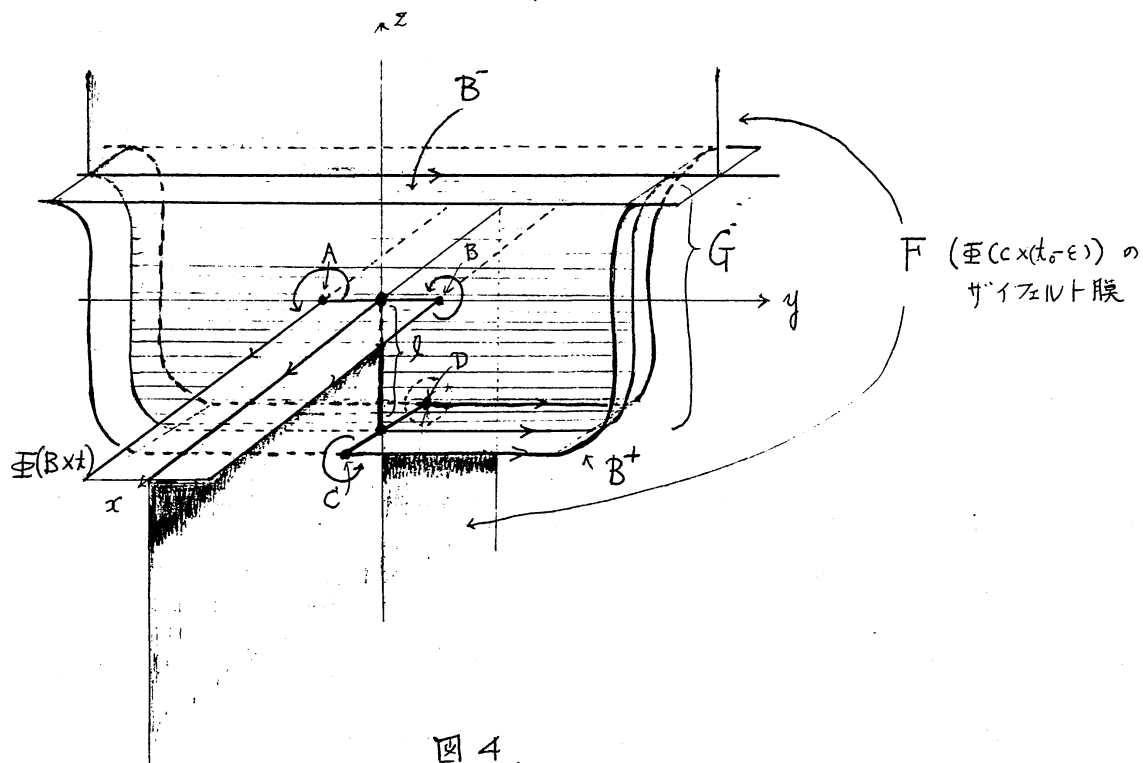


図 4.

上図の様にガイフェルト膜下の局所モデルをとれば,

$$l(B^+) = l(B^-) + 4$$

が成立する。これは,  $F \cup G$  は自己交叉 4 を有するが,

$$\pi(F \cup G) = \pi(C \times (t_0 + \varepsilon)) \quad \text{である鎖をなすことにより,}$$

$$l(B^+) = l(\pi(C \times (t_0 + \varepsilon)), F \cup G) = l(B^-) + 4$$

と計算される。結局, 一般的に,  $l(B^+) = l(B^-) \pm 4$  が成立する。[3].

はめこみ  $f: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対し,  $l(f)$  の mod 4 合同類を



$l_4(f)$  と表わす。うめこみ  $\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  は補題 1 によりはめこみ  $f: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  と正則ホモトープで、 $l_4(f)$  は補題 4 により正則ホモトピー不変量であるから、 $\varphi$  の  $\text{mod } 4$  のねり数  $l_4(\varphi) = l_4(f)$  が定義される。補題をまとめると、

定理 2. うめこみ  $\varphi, \psi: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  が正則ホモトープであるための必要十分条件は  $l_4(\varphi) = l_4(\psi)$  ということである。

(注).  $B$  が向きづけ可能なら、 $l_4(\varphi)$  は 2 でわりきれぬ。 $\varphi$  と正則ホモトープなはめこみ  $f$  に対し、 $f(B)$  は向きづけ可能であるから、 $l(f)$  が偶数となるからである。よって、その正則ホモトピー類は  $B_0$  か  $B_2$  に等しい。これは、スメルンの結果に一致する。実際、 $\pi_1(V_{3,2}) = \pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$  であるから、 $\mathbb{R}^3$  の 2-frame は順序づけられた独立なベクトルの対  $(v_1, v_2)$  である。 $(v_1, v_2) \equiv (v_1, -v_2)$  と同一視すれば、 $V_{3,2}$  の商空間  $\bar{V}_{3,2}$  が得られ、同一視写像

$$V_{3,2} \longrightarrow \bar{V}_{3,2} \quad \text{は 2 重被覆で、完全系列}$$

$$0 \rightarrow \pi_1(V_{3,2}) \rightarrow \pi_1(\bar{V}_{3,2}) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad \mathbb{Z}_2$$

が得られる。 $\pi_1(\bar{V}_{3,2}) = \mathbb{Z}_4$  が成立する。実際、 $\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対し、 $l_4(\varphi)$  を  $\pi_1(\bar{V}_{3,2})$  の元とみなすスメルンの写像の括

張を考えることができる。

$B_0$  をその 2 重被覆  $\gamma_0: B_0 \rightarrow B_0 \subset \mathbb{R}^3$  の像とみなせば,

$\ell_4(\gamma_0) \equiv 2$  であるから (図 5),  $B_0$  と  $B_2$  は正則ホモトープである。 $B_1$  の 2 重被覆  $\gamma_1: B_0 \rightarrow B_1 \subset \mathbb{R}^3$  に対しては,  $\ell_4(\gamma_1) \equiv 0$  が成立する。(図 5). よって,  $B_0$  と  $B_1$  は正則ホモトープである。(図 1 参照)  $B_2$  の 2 重被覆  $\gamma_2: B_0 \rightarrow B_2 \subset \mathbb{R}^3$  に対し,  $\ell_4(\gamma_2) \equiv 2$  が成立する。又,  $B_3$  の 2 重被覆  $\gamma_3: B_0 \rightarrow B_3 \subset \mathbb{R}^3$  に対して  $\ell_4(\gamma_3) \equiv 2$  が成立する。

結局, すべての帯  $B \subset \mathbb{R}^3$  は  $B_0$  と正則ホモトープである。

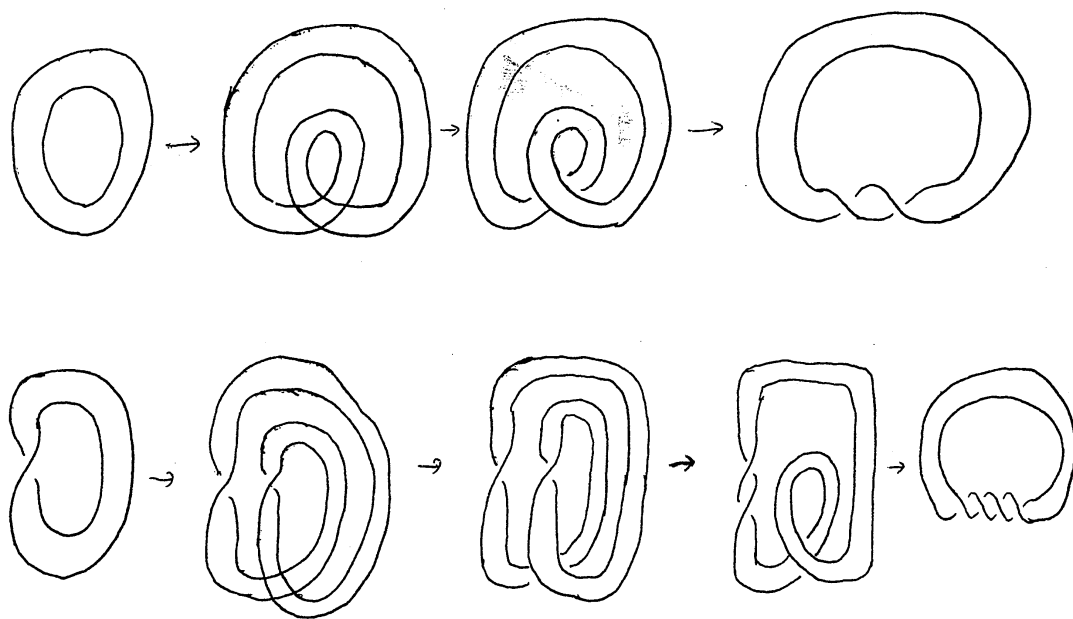


図 5.